

1^{re} édition

Formules expliquées avec cas d'application corrigés

**LES
CARRÉS**

■■■■■■■■■■
Armelle Mathé

L'essentiel *des* **Mathématiques** **financières**

Gualino

lextenso éditions

Armelle Mathé

L'essentiel *des* Mathématiques financières

1^{re} édition

 *ualino*

lextenso éditions

LES CARRÉS



Cette collection de livres présente de manière synthétique, rigoureuse et pratique l'ensemble des connaissances que l'étudiant doit posséder sur le sujet traité. Elle couvre :

- le Droit et la Science Politique;
 - les Sciences économiques;
 - les Sciences de gestion;
 - les concours de la Fonction publique.
-

Armelle Mathé est enseignante en mathématiques appliquées et en gestion dans de nombreux cursus et pour des publics très divers. Elle a enseigné les mathématiques financières à l'Université Paris 1 Sorbonne, dans le cadre du Master Comptabilité Contrôle Audit et dans le cursus finance d'écoles de commerce. Elle anime également des séminaires de formation continue sur la matière. Elle est aujourd'hui en charge de l'enseignement du contrôle de gestion et des mathématiques appliquées au Conservatoire des Arts et Métiers, à l'Intec et dans des écoles préparant les diplômes comptables.



© Gualino éditeur, Lextenso éditions 2015
70, rue du Gouverneur Général Félix Éboué
92131 Issy-les-Moulineaux cedex
ISBN 978 - 2 - 297 - 05259 - 7
ISSN 1288-8206

PRÉSENTATION

La finance occupe aujourd'hui une place essentielle dans nos sociétés. Elle fait en effet partie de la vie de chacun : nous empruntons, épargnons ou investissons pour l'achat d'un bien, nous nous débattons dans les agios, les frais bancaires et les TEG. Les actualités nous font suivre les variations des cours des marchés financiers, les difficultés des États à obtenir des crédits nous font découvrir les agences de notation et les journaux font quotidiennement état de la *Dette*.

L'entreprise qui doit gérer sa trésorerie, investir, se financer, est confrontée aux mêmes difficultés que chacun d'entre nous, et que chaque État.

Les mathématiques financières, apportant les outils nécessaires à la compréhension des problèmes financiers, occupent ainsi un rôle central dans la finance moderne et il est devenu indispensable de maîtriser les concepts qui les sous-tendent pour rationaliser nos décisions.

Ce cours présente successivement :

- ***les principes de base du calcul financier en avenir certain***, mettant l'accent sur la valeur temporelle des capitaux (intérêts simples et intérêts composés) ;
- ***les opérations financières du court terme***, telles les opérations bancaires de découvert, de crédit, les comptes d'épargne, les remises à l'escompte pour les entreprises ;
- ***les opérations financières du long terme***, avec les emprunts indivis et obligataires.

Les méthodes de choix des investissements ou de financements sont également explicitées ainsi que les mécanismes qui régissent le cours de bourse des obligations d'État. Les opérations du marché monétaire sur lequel les entreprises obtiennent des financements ou peuvent au contraire placer leurs excédents de trésorerie de façon à accroître leur rentabilité sont également étudiées.

Chaque notion nouvelle est illustrée d'**exemples** et de **schémas** afin de faciliter son assimilation.

Cet ouvrage est ainsi une aide précieuse aussi bien pour tous ***les étudiants des différents filières de l'enseignement supérieur de gestion*** (universités, écoles de commerce, IAE, expertise comptable) que pour ***les professionnels confrontés à des obligations de rentabilité*** dans un marché de plus en plus concurrentiel.

SOMMAIRE

Présentation

3

PARTIE 1 Les principes

Chapitre 1 – Les intérêts simples

15

1 – Calcul de l'intérêt : formule générale de l'intérêt simple	15
■ Formule de calcul	15
■ Taux d'intérêts proportionnels	16
■ Le problème du taux journalier	16
2 – Valeur acquise, valeur actuelle d'un capital placé à intérêts simples	19
■ Le diagramme des flux	20
3 – Équivalence à intérêts simples	24
4 – Taux d'intérêt effectif ou taux réel d'une opération	26
5 – L'escompte. Remise à l'escompte d'un effet de commerce	27
■ Diagramme des flux	28
■ Calcul de l'escompte	29
■ Valeur actuelle de l'effet de commerce	29
■ Taux réel ou effectif de l'opération d'escompte	29

Chapitre 2 – Les intérêts composés 33

1 – Définition	33
2 – Actualisation et capitalisation d'un capital placé à intérêts composés.	
Évaluation d'un capital à une date quelconque	33
■ Actualisation. Capitalisation	33
■ Valeur acquise, valeur actuelle d'un capital	36
3 – Valeur acquise, valeur actuelle d'une suite de flux de trésorerie	40
4 – Équivalence à intérêts composés	42
5 – Taux équivalents	45
6 – Annuités. Le cas particulier des annuités constantes	48
■ Définitions	36
■ Le cas particulier des suites d'annuités constantes	36
■ Valeur actuelle et valeur acquise d'une suite d'annuités constantes	36
a) Valeur de la suite de n annuités constantes, immédiatement après le versement de la dernière annuité	54
b) Valeur de la suite de n annuités constantes, une période avant le versement de la première annuité	54

PARTIE 2

Applications. Les opérations financières du court terme

Chapitre 3 – Les opérations d'escompte. Comptes courants. Crédits et épargne 61

1 – Les opérations d'escompte	61
■ Escompte, valeur actuelle d'un effet de commerce	61
■ L'agio	62
■ Taux de revient t_R d'une opération d'escompte	62

2 – Tenue des comptes courants. Crédits à court terme accordés par les banques à leurs clients : découverts bancaires	66
3 – Achats à crédit	67
4 – Livrets d'épargne	69

Chapitre 4 – Le marché monétaire.

Titres de Créances Négociables (TCN) 73

1 – Différentes formes de calcul et techniques de paiement des intérêts simples : intérêts postcomptés et intérêts précomptés	74
■ Les intérêts postcomptés	74
■ Les intérêts précomptés	77
2 – Les titres de créances négociables	78
■ Prix de souscription. Prix de cession	78
■ Taux de rendement d'une opération sur le marché monétaire	83
3 – Les principaux taux de référence du marché monétaire	87

PARTIE 3

Applications. Les opérations financières du long terme

Chapitre 5 – Les emprunts indivis 91

1 – Les éléments de l'emprunt. Tableaux d'amortissement	91
■ Le tableau d'amortissement de l'emprunt indivis	92
■ Relations entre les divers éléments de l'emprunt	92
■ Calcul du capital restant dû, après paiement de la <i>pième</i> annuité	94
2 – Le cas particulier des emprunts remboursables par annuités constantes	95
■ Calcul de l'annuité constante	95
■ La suite des amortissements	96
■ Calcul du capital restant dû en début de période	96

3 – Taux nominal d'intérêt. Taux effectif global (TEG), taux actuariel effectif global (TAEG)	99
■ Taux nominal d'intérêt	100
■ Taux de rendement actuariel ou taux réel	101
■ Taux effectif global (TEG), taux actuariel effectif global (TAEG)	102

Chapitre 6 – Les emprunts obligataires **105**

1 – Aspects juridiques et matériels	105
2 – Les éléments de l'emprunt	105
■ Les notations	105
■ Relations entre les divers éléments de l'emprunt	106
■ Différentes modalités d'émission et de remboursement	107
■ Le paiement des intérêts	108
3 – Le tableau d'amortissement de l'emprunt obligataire	108
4 – Le taux effectif à l'émission d'un emprunt obligataire	111

Chapitre 7 – Le marché des obligations **119**

1 – Valeur boursière d'une obligation à la date p	119
2 – La cotation des obligations. Cours pied de coupon et coupon couru	124
■ Cours plein coupon	124
■ Cours pied de coupon	125
■ Coupon couru	125
3 – Le risque de crédit ou risque de signature	129
4 – La mesure du risque de taux. Sensibilité et duration	132
■ Sensibilité d'un titre	

■ <i>Caractéristiques de la sensibilité, détermination des différents facteurs influant sur la sensibilité d'un titre aux variations des taux du marché à partir d'exemples</i>	133
a) Exemples sur l'influence de la durée sur la sensibilité	133
b) Exemples sur l'influence des dates et des nombres des différents flux	134
■ <i>Duration</i>	135
■ <i>Immunisation d'un placement</i>	140
5 – Références des taux obligataires	141
 Chapitre 8 – Rentabilité des investissements et choix de financements	 143
<hr/>	
1 – La rentabilité des investissements. Choix d'investissements	143
■ <i>Critère de la valeur actuelle nette (VAN) ou valeur nette présente (VNP) d'un investissement</i>	143
a) Définition	143
b) Choix	144
c) Calcul du taux interne de rentabilité	147
d) Remarques	148
■ <i>Critère du taux interne de rentabilité (TIR ou TRI ou IRR : Intern Rentability Rate)</i>	146
■ <i>L'indice de profitabilité</i>	148
■ <i>Le délai de récupération du capital investi</i>	150
2. Choix de financements	150

Liste des abréviations

EONIA	<i>Euro Overnight Interest Average</i>
EURIBOR	<i>Euro interbank offered rate</i>
HT	hors taxes
T4M	taux moyen du marché monétaire
TAEG	taux actuariel effectif global
TAM	taux annuel monétaire
TCN	titre de créance négociable
TEC _n	taux d'échéance constante à n ans
TEG	taux effectif global
TIR	taux interne de rentabilité
TMB	taux moyen mensuel des adjudications de bons du Trésor à 13 semaines
TME	taux moyen des emprunts d'État
TMO	taux moyen obligataire
TTC	toutes taxes comprises
TVA	taxe sur la valeur ajoutée
VAN	valeur actuelle nette
VNP	valeur nette présente

Les principes

PARTIE 1

Chapitre 1 – Les intérêts simples

15

Chapitre 2 – Les intérêts composés

33

Il convient, avant de s'intéresser aux opérations financières les plus fréquentes que l'on trouve sur le marché, d'étudier les *principes mathématiques qui conditionnent les valeurs des capitaux*.

Un élément essentiel : *la valeur d'un capital est toujours attachée à une date*.

Un tiens, dit-on, vaut mieux que deux tu l'auras. Cette assertion est intuitivement partagée par chacun d'entre nous, et si nous avons le choix, nous préférons tous recevoir 10 euros aujourd'hui plutôt que dans un mois, et encore plus que de ne les recevoir que dans deux mois, preuve que nous savons tous l'importance de la date attachée à un capital.

Les mathématiques financières permettent de mesurer l'impact de la durée sur les différents capitaux. Elles rendent possible de répondre par exemple à cette question : comment évaluer le capital qui serait équivalent, dans un mois, à ces 10 euros aujourd'hui ; ou bien : combien faudrait-il me verser dans un mois pour que j'accepte l'échange avec ces 10 euros que je possède aujourd'hui ?

Les mathématiques financières sont fondées sur le principe que *tout capital disponible peut être placé et rapporter ainsi un intérêt qui viendra augmenter la valeur du capital initial*.

Notons enfin que, selon le parti pris, toute opération financière peut être considérée aussi bien comme un *placement* que comme un *emprunt* ; ainsi par exemple, le particulier qui effectue un placement auprès d'un établissement bancaire prête en réalité un capital à cet établissement, qui peut en disposer comme il l'entend.